Opérations dans $\mathbb{R}$ - Équations

On rappelle qu'il y a seulement deux opérations sur les réels : addition et multiplication. Soustraire c'est ajouter l'opposé : 3-5=3+(-5), et diviser c'est multiplier par l'inverse : $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$). Tous les réels ont un opposé, et tous les réels **sauf** 0 ont un inverse. L'opposé d'une somme est la somme des opposés : $-(a+b) = -a-b$, et l'inverse d'un produit (non nul) est le produit des inverses : $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$.
Des propriétés de ces deux opérations, découlent les règles de calculs suivantes :
Pour tous réels a, b, c et d :

- si $a = b$ alors $a+c = b+c$ (**on peut ajouter le même nombre de part et d'autre de l'égalité**), il en découle par exemple, que si $a+b=c$ alors $a = c-b$ (en ajoutant $-b$ de part et d'autre).
- si $a = b$ alors $ac = bc$ (**on peut multiplier par le même nombre de part et d'autre de l'égalité**), il en découle par exemple, que si $ab = c$ avec b non nul, alors $a = \frac{c}{b}$ (en multipliant par l'inverse de b de part et d'autre). Réciproquement, si b est non nul et si $\frac{c}{b} = a$ alors $c = ab$ (en multipliant par b). On en déduit également que si b et d sont non nuls alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$ (produit en croix).

Rappels sur les puissances entières :

- *Définition* : si n est un entier positif non nul et x un réel, alors $x^n = x \times \cdots \times x$ (n fois), par convention $x^0 = 1$ (même si x est nul!). Si n est un entier positif et x un réel **non nul**, alors x^{-n} est l'inverse de x^n, c'est à dire $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $(= \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}$, n fois). Par exemple, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.
- *Propriétés à connaître* : soient x et y des réels, n et m des entiers (éventuellement négatifs si les réels sont non nuls).
  - $(x \times y)^n = x^n \times y^n$; $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ (y non nul).
  - $x^n \times x^m = x^{n+m}$; $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.
  - $(x^n)^m = x^{nm}$.

★Exercice 1 (*addition, multiplication*)

1/ On désigne par a, b, c, d, e, cinq réels. Effectuer les calculs suivants :
- **a)** $a+b-(c+d)+(a-d)-(b-c+a)+d$.
- **b)** $d-[a-(c-b)]-(a+b-d)-(d-b)$.
- **c)** $a-(c-b)-[(d+a)-(b+c-d)]-(b-d)$.
- **d)** $a-[e-(d+(b-c)-a)]-(d-c+b)$.
- **e)** $[(c-b)-(a+d)]-[e-d-(c+a)]-c$.

2/ On désigne par a, b, c, d, quatre réels. Effectuer les calculs suivants :
- **a)** $(a+b)(2-c+d)$; $(a-c)(d-c-5)$.
- **b)** $(3-b)(a-d+c)$; $(d+a)(-8+b+c)$.
- **c)** $(a-3)(b+2)-(c-5)(d+1)+3(b-d)$.
- **d)** $(c-d)(a-1)-(b+2)(d-c)-c(a+b)$.

★Exercice 2 (*développer, factoriser*)

1/ Développer :
- **a)** $(4a-3b)^2$; $(6y+5x)^2$; $(5ab-3c^2)^2$.
- **b)** $(a+b-c)^2$; $(3a-2b+c)^2$; $(a+2b+3c)^2$.
- **c)** $(x+y)^3+(x-y)^3$; $(x^2+y)^2+(x^2-y)^2$; $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2$.
- **d)** $(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$; $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$.
- **e)** $(1+x^2)(1+x\sqrt{3}+x^2)(1-x\sqrt{3}+x^2)$; $(1+3x+3x^2+x^3)(1-3x^2-x^3)$.

2/ Factoriser :
- **a)** $(x+3)^2+2(x+3)(x-4)+(x-4)^2$; $4x^3+8x^2y+4xy^2$.
- **b)** $5x^3-20xy^2$; $81x^4-16y^4$; $49x^2y^2-100$.
- **c)** $x^2-2xy+y^2-z^2$; $a^2-b^2-c^2-2bc$.
- **d)** $(x+y)^3-x^3-y^3$; x^3-27y^3.
- **e)** $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$; $8x^3+125$.
- **f)** $(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$.

★Exercice 3 (*manipulation de fractions*)

Simplifier les expressions suivantes en précisant le domaine de validité :

1/ $\frac{14(6x-7)}{(x-2)(3x+1)} + \frac{3x+4}{(x-2)(2x-5)}$; $\frac{2x+1}{x^2+2x} \times \frac{5x^2+4x}{2x^2+7x+3}$.

2/ $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} + \frac{x-8}{x-3}$.

3/ $2\frac{5x-1}{x(2x-1)} - \frac{3x-7}{x(2x+1)} - 3\frac{10x-1}{4x^2-1}$.

★Exercice 4 (*manipulation de puissances*)

Effectuer les calculs suivants :

1/ $(ab)^3$; $(a^2b)^3$; $(ab^3)^2$.

2/ $(2a^2b^3)^3$; $(-3ab^2)^4$; $\left[\left(a^2b^3\right)^2\right]^5$.

3/ $(3a^3) \times (ab^2)^4$; $(5a^2b)^2 \times (-ab^3)^3$.

4/ $\left(\frac{2a^2}{b^3}\right)^2$; $\left(\frac{a^2}{-b^3}\right)^5$.

5/ $(3a^2) \times \left(\frac{b^2}{a^3}\right)$; $\left(\frac{2a^3}{b^2}\right) \times \left(\frac{b}{a^5}\right)$.

6/ $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \times \left(\frac{2a}{b}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$; $\left(\frac{ab^2}{a^3}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^2$.

7/ $\left(2ab^{-3}\right)^{-2}$; $\left(a^2b^{-3}\right)^{-1}$; $\left[\left(a^{-3}b^2\right)^{-2}\right]^2$.

8/ $\left(-a^2b^{-1}\right)^{-1}\times\left(a^{-2}b\right)^{-2}$; $\left(5a^{-1}b^2\right)^2\times\left(-a^{-2}b\right)^{-1}$.

9/ $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-1}$; $\left(\frac{a}{b^{-3}}\right)^{-2}$; $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-3}$.

10/ $\left(3a^{-2}\right)\times\left(\frac{b^{-1}}{a^3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{a^2b}{a^4}\right)^2\times\left(\frac{b^{-2}}{a^3b}\right)^{-2}$.

★**Exercice 5** (*équations*)

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x+2=0$; $\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x-1}$; $\frac{x+1}{x-1}=2$.
b) $\frac{5x+3}{4}-\frac{x-9}{3}=\frac{x}{2}+5$; $\frac{4x+6}{3}-\frac{x+6}{2}=\frac{5x}{6}$.
c) $\frac{(2x-3)(2x+3)}{8}-\frac{(x+4)^2}{6}=\frac{(x+1)(x-2)}{3}$.
d) $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(x-5)(x+4)}{2}=\frac{(5x+4)(x-3)}{6}-\frac{20}{3}$.

2/ Même question mais avec un paramètre réel m :

a) $mx-3m=3x+5m-1$; $mx-5=m-3x$.
b) $m^2(x-1)+3m=x+2$; $m^2(x+1)+3m=x+4$.
c) $(m+1)x-2m=x+2-\frac{3mx+3m-1}{2}$.
d) $\frac{x+2m}{5}+2=\frac{3x-m}{2}+\frac{m}{10}-\frac{m-2x}{20}$.

★**Exercice 6** (*équations*)

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(x+1)(2x+3)+(x+1)^2=0$; $x^2-4=(2-x)(3x+2)$.
b) $(2x+5)^2=(3x+2)^2$; $(2x+1)(x+1)^2=4(2x+1)$.
c) $(4x^2-3x-18)^2-(4x^2+3x)^2=0$.
d) $(2x+1)(3x+2)+(2x+1)(x-2)-(4x^2-1)=0$.

2/ Même question mais avec un paramètre réel m :

a) $\frac{(m-1)^2x}{6}+\frac{2}{3}+\frac{2x+1}{6}=3x+\frac{m}{6}$.
b) $\frac{mx+2}{3-x}=4$.
c) $(m+3)x+\frac{5x-1}{2}=3x-4$.

★**Exercice 7** (*second degré*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1/ $-3x^2+9x-6=0$; $x^2-4x-6=0$.

2/ $x^2-7x+10=0$; $5x^2+(4x-7)=0$.

3/ $2x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$; $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{18})x+6=0$.

4/ $\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{3}-\frac{1}{5}=0$; $\frac{x^2}{2}-7x+1=0$.

5/ $\frac{2x+5}{x-2}-\frac{3x-6}{x+4}=2$; $\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

6/ $\frac{10x^2+23x-11}{16x^2+62x+55}=-2$.

7/ $x^4+3x^2=-2$; $x^4+3x^2=2$.

8/ $(x^2-4x-1)^2-(6x^2-3x-1)^2=0$; $(x^2-12x+7)^2-(2x^2-5x+7)^2=0$.

9/ $(m-2)x^2+5x+7-m=0$; $(m+1)x^2+(2m+1)x+2-m=0$.

★**Exercice 8**

Déterminer les réels x et y de somme S et de produit P dans les cas suivants :

1/ S = 9 et P = 18 ; S = 6 et P = 135.

2/ S = 2 et P = 2 ; S = 2 et P = 1.

3/ $S=\frac{8m+1}{m}$ et $P=\frac{16m+4}{m}$; $S=\frac{2m+3}{m+1}$ et $P=\frac{2}{m+1}$

4/ $S=\frac{4m}{1-2m}$ et $P=1$; $S=2m$ et $P=m^2-4$.

★**Exercice 9** Pour x réel on pose $f(x)=3x^4-7x^3+8x^2-7x+3$.

1/ pour $x\neq 0$, exprimer $\frac{f(x)}{x^2}$ en fonction de $y=x+\frac{1}{x}$.

2/ En déduire un procédé de résolution de l'équation $f(x)=0$.

Ordre dans $\mathbb{R}$ - Inéquations

On rappelle que $x\leqslant y$ signifie que le réel x est inférieur **ou égal** à y, à ne pas confondre avec $x<y$ qui signifie que le réel x est inférieur **et non égal** à y. Si $x<y$ alors on a forcément $x\leqslant y$ mais **la réciproque est fausse**. Deux propriétés fondamentales de l'inégalité sont à connaître, une concerne l'addition et l'autre la multiplication. Soient x, y et z des réels :

– Si $x\leqslant y$ alors $x+z\leqslant y+z$: **on peut ajouter un même réel de part et d'autre d'une inégalité**.

– Si $x\leqslant y$ et si z est **positif**, alors $xz\leqslant yz$: **on peut multiplier par un même réel <u>positif</u> de part et d'autre d'une inégalité**. Par contre, si $x\leqslant y$ et si z est **négatif**, alors $xz\geqslant yz$: **multiplier par un même réel <u>négatif</u> de part et d'autre d'une inégalité change le sens de celle-ci**.

De ces deux propriétés découlent les deux suivantes. Soient x, y, a et b des réels :

– Si $x\leqslant y$ et $a\leqslant b$ alors $x+a\leqslant y+b$: **on peut ajouter membre à membre deux inégalités <u>de même sens</u>**.

– Si $0\leqslant x\leqslant y$ et $0\leqslant a\leqslant b$ alors $xa\leqslant yb$: **on peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens lorsque <u>les quatre membres sont positifs</u>**.

★**Exercice 10** Résoudre les inéquations :

1/ $5-3x \geqslant x+1$; $7x - \frac{x+1}{2} < \frac{1-3x}{5}$; $x - \frac{x-2}{3} > \frac{1}{2} + x$.

2/ $\frac{x+1}{4} \leqslant \frac{1-3x}{5} + \frac{1-x}{1}0$; $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2+25}{2}$.

3/ $(x-1)(1-3x) < 0$; $(x-2)(4-3x) \geqslant 0$; $(4x-1)(x-2)(x+1)(2-3x) > 0$.

4/ $\frac{x}{x-2} \leqslant 3$; $\frac{x}{x-2} > 3$.

5/ $\frac{3x}{x-1} < -1$; $\frac{3x-2}{5-3x} \geqslant 1$.

6/ $\frac{x+1}{x} \geqslant \frac{x-1}{2x}$; $\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$.

7/ $\frac{(x+1)(x-2)}{2x-3} \geqslant 0$; $\frac{(1-x)(x+2)}{x} < 0$.

★**Exercice 11** Résoudre et discuter les inéquations d'inconnue x :

1/ $\frac{(m-3)x}{2m} \geqslant \frac{1-x}{2} - \frac{x-1}{m}$.

2/ $\frac{2-x}{m-1} + \frac{1+x}{m+1} < \frac{(m+1)x}{m^2-1}$.

3/ $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} > \frac{x-m}{x-m-1} - \frac{x-m-1}{x-m-2}$.

4/ $(m-2)(m-3) \leqslant (x^2-2)(x^2-3)$.

5/ $\frac{x^2+ax+a^2}{x^2+bx+b^2} > \frac{x+a}{x+b}$.

★**Exercice 12** Résoudre les inéquations :

1/ $x^2-3x<3$; $x^2-x-1>0$.

2/ $x^2+1 \geqslant 3x-3$; $2x-1 \leqslant x^2+4$.

3/ $-5x^2+3x+1<0$; $x^2-19x+84<0$.

4/ $(3x-1)(x-5) \leqslant 0$; $(5-2x)(3+x) > 0$.

5/ $x^2-9<0$; $16-x^2 \leqslant 0$.

6/ $(x^2-5x+4)(x^2-4x+3) > 0$; $(x^2-5x+4)(x^2-9x+14) \leqslant 0$.

7/ $\frac{1}{x-1} \leqslant \frac{3}{x-2}$; $\frac{4}{x} + \frac{1}{x-2} \geqslant 1$.

8/ $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{4x^2}$; $x^4+3x^2-2>0$.

Valeur absolue - Racine carrée

Rappels sur la valeur absolue :

- *Définition* : la valeur absolue d'un réel x (notée $|x|$) est le maximum entre x et $-x$, autrement dit, $|x| = x$ quand x est positif ou nul, et $|x| = -x$ quand x est négatif. Géométriquement, sur un axe gradué, $|x|$ est la distance du point d'abscisse x à l'origine de repère.
- *Propriétés à connaître* :
  - Une valeur absolue est positive. Si $|x| = 0$ alors $x = 0$.
  - $|xy| = |x| \times |y|$ (en particulier $|-x| = |x|$), et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
  - $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
  - *Se « débarrasser » d'une valeur absolue* :
    - ∗ Dans une égalité : $|x| = a$ équivaut à $a \geqslant 0$ et ($x = a$ **ou** $x = -a$).
    - ∗ Dans une inégalité :
      $|x| \leqslant a$ équivaut à $-a \leqslant x \leqslant a$ (pas de solution si $a < 0$) ;
      $|x| \geqslant a$ équivaut à $x \leqslant -a$ **ou** $x \geqslant a$.

Rappels sur la racine carrée :

- *Définition* : pour tout réel **positif** a, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions opposées. On appelle racine carrée de a celle des deux qui est positive et on la note $\sqrt{a}$. Autrement dit, $x = \sqrt{a}$ signifie que $x \geqslant 0$ et $x^2 = a$.
- *Propriétés à connaître* :
  - Une racine carrée est positive. Si $\sqrt{x} = 0$ alors $x = 0$.
  - Si x et y sont positifs : $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$, et $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
  - Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$ (attention à ne pas oublier la valeur absolue quand x est négatif!).
  - *Se « débarrasser » d'une racine carrée* :
    - ∗ Dans une égalité : $\sqrt{x} = a$ équivaut à $a \geqslant 0$ **et** $x = a^2$.
    - ∗ Dans une inégalité :
      $\sqrt{x} \leqslant a$ équivaut à $a \geqslant 0$ **et** $x \geqslant 0$ **et** $x \leqslant a^2$;
      $\sqrt{x} \geqslant a$ équivaut à $x \geqslant 0$ **et** $x \geqslant a^2$ lorsque a est positif (si a est négatif, l'inégalité équivaut simplement à $x \geqslant 0$).

★**Exercice 13** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1/ $x+1-\sqrt{4x-15} = 4$; $\sqrt{16x-7} = 8\sqrt{x-4}$.

2/ $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+3} = 2$; $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12}$.

3/ $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 5$; $\sqrt{x+12} + \sqrt{x-14} = \sqrt{x-4}$.

4/ $2(x+4) + \sqrt{x(x+6)} = 16$; $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$.

5/ $\sqrt{2x+7} + 3 = 3(x+1)$; $\sqrt{x+18} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+2}$.

6/ $x+1 < \sqrt{x+4}$; $x-1 < \sqrt{x^2-2}$.

7/ $x-3 \geqslant \sqrt{x^2-2x}$; $2x-\sqrt{x}-1<0$.

8/ $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leqslant 1-x$.

★**Exercice 14** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1/ $|x-1|+x^2-3x=0$; $|x|+|x-1|=1$.

2/ $||x|-|x-1||=1$; $|x|+|x+1|+|x-1|=2$.

3/ $|-3x+2|+|2x-3|=5$; $|2x+4|+|-2x+7|=8$.

4/ $||x-1|-|3-x||=16$; $|x|-|x-1|=1$.

5/ $|(x-3)(x-5)|>x-3$; $|x|+|x-1|+|x-2| \leqslant 6$.

6/ $(|x|-3)(|x|-5)>0$; $(|x|-3)(|x|-5) \leqslant \frac{|x|-5}{|x|-3}$.

7/ $|1-x| \geqslant 2|x|-1$; $|x+2| \geqslant \dfrac{1-x}{1+x}$.